Igre dvaju igrača sa sumom nula

- mnoge situacije u dnevnom životu sadrže različite **konflikte i natjecanja**
- kako u takvim situacijama donijeti najbolju (optimalnu) **odluku** u cilju maksimiziranja svoje korisnosti? → **Teorija igara**

- salonske igre (karte, rulet), sportske igre (šah), ratni sukobi, političke kampanje, reklamne kampanje

- teorija igara u procesu odlučivanja u ekonomiji, psihologiji, sociologiji, političkim znanostima

- 1944 – John **von Neumann** i Oskar **Morgenstern** (Princeton University): «Games and Economic Behavior»

Terminologija:

- sudionici igre ili **igrači**
- funkcija cilja, funkcija korisnosti, **funkcija isplata**
- svaka funkcija isplata određuje **dobitak** svakog igrača
- svaki igrač ima svoju **strategiju**

Igre dvaju igrača sa sumom nula (najjednostavnije igre) uključuju:

- samo dva igrača
- dobitak jednog igrača istovremeno predstavlja gubitak drugog igrača

Primjer 1. Igra «Par-nepar»

Igra se sastoji u tome da svaki od igrača pokaže jedan ili dva prsta, istovremeno. Ako je ukupan broj prstiju paran, tada pobjeđuje igrač A i dobiva 1 kn od igrača B. Ukoliko je ukupan broj prstiju neparan, pobjeđuje igrač B i dobiva 1 kn od igrača A.

Dakle, **svaki igrač ima dvije strategije:**

(1) pokazati jedan prst
(2) pokazati dva prsta

Tablica isplata je sljedeća:

Strategija		Igrač B	
		(1)	(2)
Igrač A	(1)	1	-1
	(2)	-1	1

Općenito, ova je igra karakterizirana s:

(1) strategijama prvog igrača
(2) strategijama drugog igrača
(3) tablicom isplata

- prije početka igra, svaki igrač zna strategije onog drugog igrača i tablicu isplata

- igra se sastoji u tome da oba igrača, bez poznavanja izbora onog drugog igrača, istovremeno izaberu i odigraju jednu od strategija

- tablica isplata sadrži dobitak sa stajališta igrača A. Tablica isplata sa stajališta igrača B može se dobiti ako se zadana tablica pomnoži s (-1)

- **osnovni cilj teorije igara** je pronaći **racionalne kriterije** za izbor strategije, a pri tom se pretpostavlja:

(a) oba su igrača racionalna
(b) oba igrača odabiru svoju strategiju u cilju maksimiziranja svoje korisnosti (bez milosti za onog drugog)

Primjer 2. «Predizborna kampanja»

Dva se političara bore za jedno mjesto. Kako kampanja traje još dva dana, oba su kandidata odlučila to vrijeme provesti u dva najveća grada, S i Z. Aranžmani se moraju dogovoriti unaprijed, bez ikakvog znanja o odluci protivnika. Koju odluku donijeti?

Svaki igrač (političar) može igrati tri strategije:

(1) provesti jedan dan u svakom gradu
(2) provesti dva dana u gradu S
(3) provesti dva dana u gradu Z

a u cilju maksimiziranja svoje korisnosti koja je ovdje opisana brojem dodatnih dobivenih glasova.

Varijanta 1. : tablica isplata sa stajališta političara 1 je sljedeća:

Strategija		Igrač 2		
		(1)	(2)	(3)
Igrač 1	(1)	1	2	4
	(2)	1	0	5
	(3)	0	1	-1

gdje su isplate dane u tisućama dodatnih glasova.

Ovaj se problem može riješiti pomoću **dominirane strategije.**

Definicija 1. Kažemo da je jedna strategija **dominirana** ako postoji druga strategija (**dominirajuća**) koja je uvijek jednako dobra, a barem u jednom slučaju bolja, bez obzira što protivnik učinio.

Naime, takva se dominirana strategija može ispustiti iz daljnjeg razmatranja.

Uočimo da je u gornjoj tablici, za igrača 1, strategija (3) dominirana strategijom (1) jer ova druga ima veće isplate:

$$1 > 0, \ 2 > 1 \ , 4 > -1$$

bez obzira koju strategiju izabire igrač 2.

Ispuštanjem strategije (3) za igrača 1, dolazimo do reducirane tablice isplata:

Strategija		Igrač 2		
		(1)	(2)	(3)
Igrač 1	(1)	1	2	4
	(2)	1	0	5

Budući da je igrač 2 racionalan i on će doći do ovog zaključka. No, sada igrač 2 ima dominiranu strategiju, strategiju (3) koja je dominirana i sa strategijom (1) i sa strategijom (2):

(1): $1 < 4$, $1 < 5$

(2): $2 < 4$, $0 < 5$

(Pazi! Isplate u tablici su gubici za igrača 2, pa ih on želi minimizirati)

Sada je reducirana tablica isplata:

Strategija		Igrač 2	
		(1)	(2)
Igrač 1	(1)	1	2
	(2)	1	0

Strategija (2) je za igrača 1 dominirana strategijom (1) jer je

$$1 = 1, \quad 2 > 0$$

Reducirana je tablica sada jednaka:

Strategija		Igrač 2	
		(1)	(2)
Igrač 1	(1)	1	2

Strategija (2) je sada dominirana strategijom (1) za igrača 2 jer je

$$1 < 2,$$

pa slijedi:

Strategija		Igrač 2 (1)
Igrač 1	(1)	1

Dakle, oba bi igrača trebala igrati strategiju (1), tj., provesti u svakom gradu jedan dan. Tada će igrač 1 dobiti dobitak 1 (1000 dodatnih glasova) od igrača 2.

Kad oba igrača igraju optimalno, dobitak (ili isplata) za igrača 1 predstavlja **vrijednost igre**. U našem je slučaju vrijednost igre 1.

U slučaju da je vrijednost igre 0, govorimo o **pravednoj igri**. Varijanta 1. našeg problema nije pravedna.

Varijanta 2. : tablica isplata sa stajališta političara 1 je sljedeća:

Strategija		Igrač 2		
		(1)	(2)	(3)
Igrač 1	(1)	-3	-2	6
	(2)	2	0	2
	(3)	5	-2	-4

gdje su isplate dane u tisućama dodatnih glasova.

Ova igra nema dominiranih strategija ni za jednog igrača! Kako igrati?

Promatrajmo najprije **igrača 1**. Ako izabere strategiju (1), može dobiti 6 ili izgubiti najviše 3. Kako je igrač 2 racionalan, on će se zaštititi od velikih isplata igraču 1, pa izgleda vjerojatno da bi igrač 1, igrajući strategiju (1), izgubio. Slično tome, igrač 1 može igrati strategiju (3) i dobiti 5, ali i izgubiti najviše 4. Ako pak igrač 1 odabere strategiju (2), siguran je da neće ništa izgubiti, a možda čak i nešto dobije. Dakle, strategija (2) se čini kao **racionalan izbor** za igrača 1 jer ima jaču garanciju dobitka nego ostale strategije.

Promatrajmo sad **igrača 2**. On može najviše izgubiti 5 ili 6, a igrajući strategiju (1) ili (3). Zato je za njega strategija (2) racionalan izbor.

Primijetimo da **poznavanje protivnikovog poteza ne predstavlja prednost** tj., čak i kad jedan igrač zna (racionalnu) strategiju protivnika, on ne može poboljšati svoj dobitak mijenjanjem strategije.

Dakle, **igrač 1** treba izabrati strategiju koja **maksimizira njegov (sigurni) minimalni dobitak (maksimin kriterij!).**

Igrač 2 treba izabrati strategiju koja **minimizira njegov sigurni maksimalni gubitak (minimaks kriterij!).**

Kasnije ćemo pokazati da je:

$$\text{maksimin} \leq \text{minimaks},$$

pa se maksimin zove **donja vrijednost igre**, a minimaks **gornja vrijednost igre**.

U našem je primjeru (Varijanta 2.):

$$\text{maksimin} = \text{minimaks} = 0,$$

pa je vrijednost igre jednaka nuli, a dostiže se za strategiju (2) igrača 1 i strategiju (2) igrača 2.

Definicija 2. U slučaju ako vrijedi da je

maksimin = minimaks = vrijednost igre

kažemo da igra ima **sedlastu točku**. Sedlasta točka je mjesto u tablici na kojem se nalazi vrijednost igre. U našem je primjeru sedlasta točka mjesto (2,2).

Postupak za određivanje sedlastih točaka:

(1) označiti kružićem minimalnu vrijednost u svakom retku
(2) označiti kvadratićem maksimalnu vrijednost u svakom stupcu
(3) mjesto označeno i kružićem i kvadratićem predstavlja sedlastu točku

Napomena: postoje igre s više sedlastih točaka

Strategija		Igrač 2		
		(1)	(2)	(3)
Igrač 1	(1)	-3	-2	6
	(2)	2	0	2
	(3)	5	-2	-4

Varijanta 3. : tablica isplata sa stajališta političara 1 je sljedeća:

		Igrač 2		
Strategija		(1)	(2)	(3)
Igrač 1	(1)	0	-2	2
	(2)	5	4	-3
	(3)	2	3	-4

Tražimo sedlastu točku (primijetimo da je (2) > (3), ali o tome kasnije)!

		Igrač 2		
Strategija		(1)	(2)	(3)
Igrač 1	(1)	0	-2	$\boxed{2}$
	(2)	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	-3
	(3)	2	3	-4

Igra nema sedlastu točku!

$$\text{maksimin} = -2 \text{ , minimaks} = 2$$

Dakle, igrajući strategiju (1), igrač 1 sigurno neće izgubiti više od 2. Također, igrajući strategiju (3), igrač sigurno neće izgubiti više od 2.

Strategija		Igrač 2		
		(1)	(2)	(3)
Igrač 1	(1)	0	-2	2
	(2)	5	4	-3
	(3)	2	3	-4

Koje su posljedice ako igrač 1 igra strategiju (1), a igrač 2 strategiju (3)?

Igrač 1 će zaraditi 2, pa će igrač 2 biti nezadovoljan. Budući da je igrač 2 racionalan, on će predvidjeti takav slijed događaja, pa će zaključiti da mu je bolje odigrati strategiju (2) gdje će zaraditi 2.

No, i igrač 1 je racionalan, pa će on preduhitriti igrača 2 i prebaciti se na strategiju (2) jer će tako umjesto gubitka 2, zaraditi 4.

No, igrač 2 će se sad prebaciti na strategiju (3), i tako umjesto gubitka 4, zabilježiti dobitak 3.

Mogućnost te promjene strategije nagnat će igrača 1 na strategiju (1), pa će se cijeli ciklus ponoviti.

Strategija		Igrač 2		
		(1)	(2)	(3)
Igrač 1	(1)	0	-2	$\boxed{2}$
	(2)	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	-3
	(3)	2	3	-4

Koje su posljedice ako igrač 1 igra strategiju (1), a igrač 2 strategiju (3)?

Sve u svemu, takvo je igranje od strane igrača 1 i 2 **nestabilno rješenje** jer igra nema sedlastu točku.

Kako optimalno odigrati ovu igru? Rješenje su **mješovite strategije**!

U slučaju igre sa sedlastom točkom, kažemo da je **rješenje stabilno** i da igrači igraju **čiste strategije**.

U slučaju igre bez sedlaste točke kažemo da je **rješenje nestabilno** i da igrači igraju **mješovite strategije**.

Dakle, u slučaju igre bez sedlaste točke, teorija igara savjetuje **svakom igraču** da skupu svojih strategija pridruži **distribuciju vjerojatnosti**.

Kad igrači zaista igraju, oni moraju igrati jednu od svojih čistih strategija. Pri tom će čistu strategiju odabrati na neki slučajan način, na osnovu promatranja distribucije vjerojatnosti što će mu pomoći odlučiti koju strategiju igrati.

Za **igrača 1**, optimalna je ona mješovita strategija koja daje najbolji **(maksimalni) minimalni očekivani dobitak**.

Vrijednost tog «maksimina» očekivanog dobitka zove se **donja vrijednost igre,** v_1.

Za **igrača 2**, optimalna je ona mješovita strategija koja daje najbolji **(minimalni) maksimalni očekivani gubitak**.

Vrijednost tog «minimaksa» očekivanog gubitka zove se **gornja vrijednost igre,** v_2.

Teorem 1. (Minimaks teorem) U slučaju mješovitih strategija uvijek postoji stabilno rješenje.

v_1 = donja vrijednost igre =

$$\max_x \min_y E(x,y) = \min_y \max_x E(x,y) =$$

gornja vrijednost igre = v_2

$$x, y \geq 0,\ \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Dokaz. Poziva se na teorem dualiteta iz linearnog programiranja.

Kako odrediti optimalne mješovite strategije?

Ako jedan od igrača ima samo dvije, nedominirane, čiste strategije, problem možemo riješiti grafički. Inače, to je moguće svođenjem igre na problem linearnog programiranja.