Trg J. F. Kennedya 6
10000 Zagreb, Croatia
Tel +385(0)1 238 3333
www.efzg.hr/wps
wps@efzg.hr

EFZG WORKING PAPER SERIES
EFZG SERIJA ČLANAKA U NASTAJANJU
ISSN 1849-6857
UDK 33:65

Br. 18-01

Margareta Gardijan
Vedran Kojić
Marina Slišković

Farkaseva lema: elementarni dokaz i ekonomske primjene

Farkaseva lema: elementarni dokaz i ekonomske primjene

Margareta Gardijan
mgardian@efzg.hr
Ekonomski fakultet Zagreb
Sveučilište u Zagrebu
Trg J. F. Kennedyja 6
10 000 Zagreb, Hrvatska

Vedran Kojić
vkojic@efzg.hr
Ekonomski fakultet Zagreb
Sveučilište u Zagrebu
Trg J. F. Kennedyja 6
10 000 Zagreb, Hrvatska

Marina Slišković
msliskovic@efzg.hr
Ekonomski fakultet Zagreb
Sveučilište u Zagrebu
Trg J. F. Kennedyja 6
10 000 Zagreb, Hrvatska

Sažetak

U ovom radu donosimo elementarni dokaz Farkaseve leme. U matematici je Farkaseva lema vrlo bitna činjenica koja se koristi u teoriji optimizacije, primjerice u izvođenju Karush-Khun-Tuckerovih uvjeta optimalnosti u slučaju ograničenja u obliku nejednakosti kod nelinearnog programiranja, te u dokazivanju dualnih teorema za linearno programiranje. Iako je Farkasevu lemu vrlo jednostavno iskazati, njezin dokaz nije trivijalan (većina dokaza se temelji na netrivijalnim rezultatima iz područja optimizacije i (linearne) algebre), o čemu govori i podatak da su ju mnogi na različite načine dokazivali još od 1972. (pa i ranije) sve do danas, nadmećući se pritom tko će ponuditi jednostavniji dokaz. U ovom radu Farkasevu lemu dokazujemo na elementaran način koristeći matematičku indukciju. Dokaz ove leme matematičkom indukcijom je poznat u stranoj, ali ne i u domaćoj literaturi. Stoga je cilj ovog rada revidirati taj dokaz, ispraviti postojeće nedostatke i pogreške, te detaljno objasniti svaku stavku dokaza, nekoristeći pritom složene termine i činjenice iz područja optimizacije i algebre. Osim samog dokaza Farkaseve leme, navodimo i njezine dvije primjene u ekonomiji, čime želimo, s jedne strane, približiti i objasniti Farkasevu lemu na razumljiv način čitateljima koji po svom zvanju nisu matematičari, ali ju koriste u svom radu, te s druge strane doprinijeti razumijevanju samog iskaza Farkaseve leme kroz konkretne primjere.

Ključne riječi
Farkaseva lema, matematički dokaz, matematička indukcija, financijsko modeliranje, teorija igara

JEL klasifkacija
C690, C700, G10

1. Uvod

Gyula Farkas je rođen 28. ožujka 1847. godine u mjestu Pusztasárosd (danas Sárosd) pokraj jezera Balaton u Mađarskoj. Njegov znanstveni doprinos ogleda se u području iz fizike, ali i iz matematike. Osim prema znanstvenoj karijeri, Farkas je pokazivao ljubav i prema glazbi, kojoj se posvetio kasnije u životu. Napisao je nekoliko članaka o glazbi, svirao je klavir, te je čak i nastupao izvan granica Mađarske (Gurka 2011). Ipak, najveći dio života posvetio je izučavanju fizikalnih problema, te njihovim matematičkim uporištima. Bio je ugledni profesor na katedrama za fiziku i matematiku Sveučilišta u Kolozsváru, a 1898. godine je imenovan članom Mađarske akademije znanosti.
Osnovno načelo o homogenim linearnim nejednakostima postalo je dio povijesti iz matematike pod nazivom Farkasev teorem. Albert W. Tucker je to načelo ponovno otkrio u pedesetim godinama 20. stoljeća te ga iskoristio u svojim dokazima (Prékopa 1999). Kasnije je Farkas prepoznat kao preteča nekoliko područja moderne znanosti (poput linearnog programiranja, optimizacije u matematici, optimizacije u ekonomiji). Jedna od novijih sinteza povijesti matematike navodi kako je Farkasev teorem jedan od najvažnijih rezultata koji su prethodili linearnom programiranju (Brentjes 1994). Posljednjih petnaest godina života Farkas je proveo u Budimpešti, gdje je i umro 27. prosinca 1930. godine.
Farkasev teorem, ili Farkaseva lema, kao matematička činjenica koja ima svoje fizikalno uporište, ima i svoje primjene u ekonomiji koje donosimo u ovom radu. Struktura samog rada je sljedeća. Nakon uvoda kao prvog poglavlja, u drugom poglavlju navodimo iskaz Farkaseve leme te njezine ekvivalentne varijante. U trećem poglavlju govorimo o matematičkoj indukciji kao metodi za dokazivanje raznih matematičkih tvrdnji, pomoću koje, potom, na elementaran način dokazujemo Farkasevu lemu. Četvrto poglavlje govori o primjenama Farkaseve leme u ekonomiji, točnije, u području financijskog modeliranja. Konačno, u petom poglavlju dajemo zaključna razmatranja.

2. Iskaz Farkaseve leme i geometrijska interpretacija

Farkaseva lema se može iskazati na više načina koji su međusobno ekvivalentni (vidjeti, primjerice, Jaćimović 2011 ili Jukić 2015). Ovdje ćemo navesti dva iskaza i dati odgovarajuću geometrijsku interpretaciju Farkaseve leme.

Tvrdnja 2.1. Neka je A matrica reda $n\times r$ i $b\in\mathbb{R}^n$ vektor. Tada od dvaju sustava nejednadžbi

$$A\lambda = b,\ \lambda \ge 0,\ \lambda \in \mathbb{R}^r \tag{1}$$

i

$$A^T s \ge 0,\ b^T s < 0,\ s \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

samo jedan ima rješenje.

Ovaj iskaz je preuzet iz Neralić (2008). Drugi iskaz navodimo prema Jaćimović (2011).

Tvrdnja 2.2. Neka je $A\in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ i neka je $b\in\mathbb{R}^m$. Tada ili

$$\text{postoji } x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x\ge 0 \text{ t.d. } Ax=b, \tag{3}$$

ili

$$\text{postoji } z\in\mathbb{R}^m \text{ t.d. } A^T z\le 0 \text{ i } b^T z>0. \tag{4}$$

Uočimo da je (4) ekvivalentno s

$$\text{postoji } z\in\mathbb{R}^m \text{ t.d. } A^T z\ge 0 \text{ i } b^T z<0.\text{[1]} \tag{4'}$$

[1] Primijetimo da su x iz (3) i A^Tz iz (4') n-komponentni vektori, ili matrice-stupci čiji su elementi nenegativni realni brojevi, dok je b^Tz iz (4') skalarni umnožak vektora b i z, odnosno broj čija je vrijednost negativna.

Očito je da (3) i (4) ne mogu istovremeno vrijediti. Naime, kada bi (3) i (4) istovremeno vrijedili, onda bismo imali

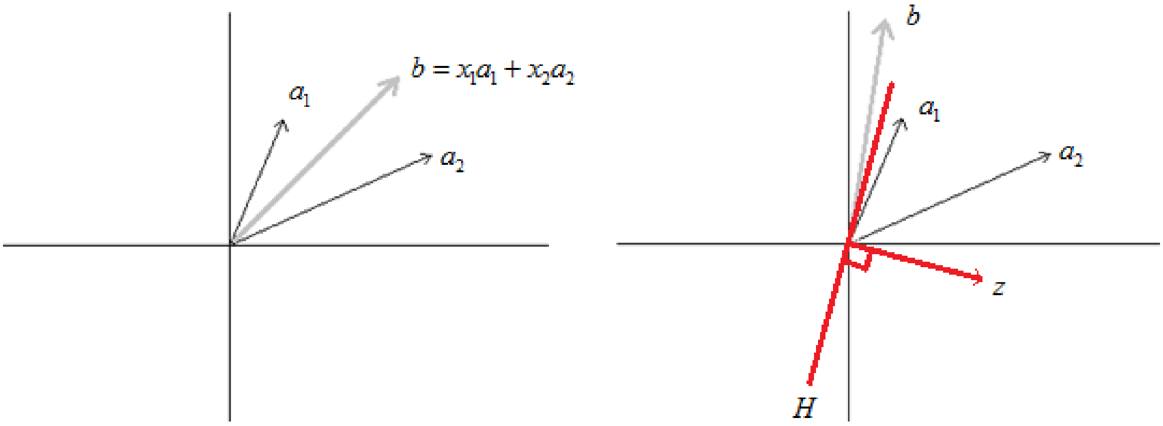
$$0 < b^T z = (Ax)^T z = \underbrace{x^T}_{\geq 0} \underbrace{(A^T z)}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow 0 < 0\,, \tag{5}$$

što je očito kontradikcija. Ako Farkasevu lemu iskažemo u varijanti „ili (3) ili (4')“, imamo sljedeću geometrijsku interpretaciju (Jukić 2015):

Neka je $C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \subseteq \mathbb{R}^m$ konus generiran vektor stupcima matrice *A*, to jest vektorima $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$, te $b \in \mathbb{R}^m$. Tada je ili

(a) $b \in C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, to jest *b* se može prikazati kao linearna kombinacija stupaca matrice *A* s nenegativnim koeficijentima, ili je

(b) $b \notin C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, to jest postoji hiperravnina *H* s vektorom normale *z* koja razdvaja konus $C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i vektor *b* (vidjeti sliku 1).



Slika 1: Geometrijska interpretacija Tvrdnje 2.2. u slučaju *n*=2.

Izvor: Autori.

Uočimo da su tvrdnje 2.1. i 2.2. ekvivalentne (dokaz o ekvivalentnosti je trivijalan i prepuštamo ga čitatelju).

3. Elementarni dokaz Farkaseve leme primjenom matematičke indukcije

U ovom radu Farkasevu lemu, koju smo iskazali u prethodnom poglavlju kao Tvrdnju 2.1. i Tvrdnju 2.2., dokazujemo matematičkom indukcijom. Najprije ćemo na nekoliko primjera objasniti princip matematičke indukcije.

3.1. O matematičkoj indukciji

Matematička indukcija je iznimno moćan alat kojim se mogu dokazivati mnoge tvrdnje iz područja diskretne matematike, ali i iz drugih područja kako teorijske matematike, tako i primjenjene matematike. U ovom odjeljku ćemo posebno istaknuti i ilustrirati kako se matematička indukcija koristi u dokazivanju nekih važnih formula i činjenica u financijskoj matematici. Zna se da su neke verzije principa matematičke indukcije poznate još iz vremena prije Krista. (Acerbi 2000), no zasigurno možemo reći da se princip matematičke indukcije kakvog znamo danas počeo primjenjivati još u 18.

stoljeću, o čemu govori i podatak kako je primjenom matemtičke indukcije Goldbach[2] dokazao da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva[3] (to su brojevi koji su djeljivi samo s jedinicom i samim sobom) (Acerbi 2000).

Postoji nekoliko verzija matematičke indukcije. Ovdje ćemo navesti dvije verzije principa matematičke indukcije, koje ćemo potom ilustritati na zanimljivim primjerima.

Princip *osnovne matematičke indukcije* je najlakši za objasniti i shvatiti. Tri su osnovna elementa ovog principa: *baza indukcije*, *pretpostavka indukcije* i *korak indukcije*. Pretpostavimo da želimo dokazati da neka tvrdnja $T(n)$, koja ovisi o n, vrijedi za sve brojeve n iz skupa $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, to jest za sve prirodne brojeve n. Pomoću matematičke indukcije to radimo na način da

(*i*) prvo provjerimo bazu indukcije, to jest pokažemo da tvrdnja T vrijedi za prvi prirodni broj, odnosno dokažemo $T(1)$,

(*ii*) zatim pretpostavimo da tvrdnja T vrijedi za neki $k=n$ prirodan broj, to jest da vrijedi $T(n)$, što se naziva pretpostavka indukcije,

(*iii*) a potom pokažemo da tvrdnja T vrijedi i za sljedeći prirodan broj $k=n+1$, to jest da vrijedi $T(n+1)$. Drugim riječima, dokazujemo korak indukcije.

Na kraju, nakon što smo dokazali korak indukcije (*iii*), možemo zaključiti da po principu matematičke indukcije, tvrdnja T vrijedi za svaki prirodan broj.

U svrhu boljeg razumijevanja, ilustrirajmo princip (osnovne) matematičke indukcije na primjeru niza padajućih domina. Naime, zamislimo da imamo niz od $n \in \mathbb{N}$ domina koje su poredane jedna do druge, te da želimo dokazati tvrdnju koja glasi: „Ako prvom dominom srušimo drugu dominu, tada će sve domine u nizu pasti." Dakle, u ovom slučaju, tvrdnja pod navodnim znacima je naša tvrdnja T. Baza indukcije bi u ovom slučaju glasila da ako prvom dominom srušim drugu, tada će sve domine u nizu pasti, što je u ovom slučaju točno jer je $n=2$, odnosno imamo samo dvije domine u nizu i obje domine padaju. Sada je lako vidjeti da, ako prvom dominom srušimo drugu, druga će treću, treća će četvrtu i tako dalje (uočimo da ovaj proces predstavlja korak indukcije), na kraju će se sve domine srušiti, što predstavlja istinitost naše tvrdnje T.

Drugi vid dokazivanja matematičkom indukcijom se naziva princip *jake matematičke indukcije*. Isto kao i osnovna, i jaka matematička indukcija ima bazu, pretpostavku te korak indukcije. Razlika je u pretpostavci, koja kod jake matematičke indukcije glasi (usporediti s (*ii*)):

(*ii'*) zatim pretpostavimo da tvrdnja T vrijedi za sve prirodne brojeve $k < n$, to jest za brojeve 1, 2, 3, …, $n-1$, odnosno da vrijedi $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, …, $T(n-1)$.

Sada ćemo na nekoliko primjera ilustrirati primjenu principa matematičke indukcije.

Primjer 3.1. Dokažite da je zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)}{2}$.

Rješenje: Ovaj problem se vrlo elegantno može riješiti primjenom Gaussove[4] dosjetke (Dakić n.a.), no ovdje ćemo dati dokaz primjenom (osnovne) matematičke indukcije po n.

(*i*) Za $k=1$ tvrdnja vrijedi jer je $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, čime smo provjerili bazu indukcije.

[2] Christian Goldbach (1690.–1764.), Njemačka – Rusija

[3] Poznato je da je još prije Krista Euklid dokazao da ne postoji konačan skup koji bi sadržavao sve proste brojeve. Iako je Euklid svoj dokaz proveo direktnim dokazom, danas je ipak poznatiji dokaz kontradikcijom.

[4] Carl Friedrich Gauss (1777.–1855), Njemačka

(*ii*) Pretpostavimo da tvrdnja vijredi za neki prirodan broj $k=n$, to jest da vrijedi

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

(*iii*) i dokažimo da tvrdnja vrijedi i za sljedeći prirodan broj $k=n+1$, to jest da vrijedi

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Naime, zbog pretpostavke indukcije (*ii*) imamo

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}_{(ii)}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

što smo i trebali dokazati. Dakle, po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj. **Q.E.D.**

Primjer 3.2. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.

***Rješenje*:** Prije svega, napomenimo da je ovu tvrdnju dokazao Euklid[5] direktnim dokazom, a danas je vrlo poznat i raširen dokaz ove tvrdnje kontradikcijom. Međutim, Goldbach je matematičkom indukcijom dokazao da su bilo koja dva Fermatova[6] broja relativno prosta. Da bismo razumjeli Goldbachov dokaz, prvo moramo definirati Fermatove brojeve. Fermatovi brojevi F_n su brojevi oblika $F_n=2^{2^n}+1$, gdje je n nenegativni cijeli broj (očito je da Fermatovih brojeva ima beskonačno mnogo jer su prikazani beskonačnim nizom F_n, n=0, 1, 2, 3, …). Prvih šest Fermatovih brojeva su 3, 5, 17, 257, 65537 i 4294967297=641·6700417, iz čega odmah možemo uočiti da nisu svi prosti brojevi Fermatovi brojevi (recimo 7 je prost broj, ali nije Fermatov). Nadalje, pokazat ćemo da su bilo koja dva Fermatova broja međusobno relativno prosti brojevi (to jest, da im je najveći zajednički djelitelj broj 1). Razmotrimo sljedeću formulu koja predstavlja rekurziju za Fermatove brojeve

$$\prod_{i=0}^{n-1}F_i=F_n-2. \tag{6}$$

Nismo sigurni vrijedi li formulu (6) za sve Fermatove brojeve, pa ju trebamo dokazati matematičkom indukcijom po n.

(*i*) Za k=1 (odnosno n=1) lijeva strana relacije (6) postaje $\prod_{i=0}^{0}F_i=F_0=3$, a desna strana $F_1-2=5-2=3$, pa je doista $\prod_{i=0}^{0}F_i=F_1-2$, čime smo provjerili bazu indukcije.

(*ii*) Pretpostavimo da tvrdnja vijredi za neki prirodan broj $k=n$, to jest da vrijedi $\prod_{i=0}^{n-1}F_i=F_n-2$,

(*iii*) i dokažimo da relacija (6) vrijedi i za $k=n+1$, to jest da vrijedi $\prod_{i=0}^{n}F_i=F_{n+1}-2$. Naime, prema pretpostavci indukcije imamo

[5] Euklid iz Aleksandrije, (323. pr. Krista–270. pr. Krista), Egipat
[6] Pierre de Fermat (1607. – 1665.), Francuska

$$\prod_{i=0}^{n} F_i = \underbrace{\left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right)}_{(ii)} \cdot F_n = \left(F_n - 2\right) F_n \ . \tag{7}$$

Budući da je prema definiciji Fermatovog broja $F_n = 2^{2^n} + 1$, to iz (7) slijedi

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n} F_i &= \left(F_n - 2\right) F_n = \left(2^{2^n} + 1 - 2\right)\left(2^{2^n} + 1\right) = \left(2^{2^n} - 1\right)\left(2^{2^n} + 1\right) = 2^{2^{n+1}} - 1 \\ &= \left(2^{2^{n+1}} + 1\right) - 2 = F_{n+1} - 2, \end{aligned} \tag{8}$$

što smo i trebali dokazati. Dakle, po principu matematičke indukcije, formula (6) vrijedi za svaki nenegativan cijeli broj.

Uočimo, sada, da smo dokazavši relaciju (6), zapravo dokazali da su bilo koja dva Fermatova broja međusobno relativno prosti. Naime, ako brojevi F_i i F_n (uz pretpostavku $i<n$) imaju najveći zajednički djelitelj d, tada zbog $\left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) - F_n = -2$ slijedi da d mora dijeliti broj –2, to jest mora biti ili d=1 ili d=2. No, d ne može biti jednak 2 jer su svi Fermatovi brojevi neparni. Dakle, mora biti d=1, čime smo dokazali da su bilo koja dva proizvoljna Fermatova broja relativno prosti, iz čega slijedi da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva. Naime, izaberimo iz svakog Fermatovog broja njegov prosti djelitelj, pa budući da su svi Fermatovi brojevi međusobno relativno prosti, izabrani prosti djelitelji moraju biti međusobno različiti, a kako je Fermatovih brojeva beskonačno mnogo, to je beskonačno mnogo (različitih!) prostih djelitelja, odnosno beskonačno mnogo prostih brojeva. **Q.E.D.**

Kao što smo već prije naveli, princip matematičke indukcije se često koristi i u primjenama. Na sljedećih nekoliko primjera ilustrirat ćemo primjenu matematičke indukcije u dokazivanju činjenica iz područja ekonomije.

Primjer 3.3. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kune i 5 kuna moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu koja nije manja od 8 kuna.

Rješenje: Uočimo da se problem zapravo svodi na to da pokažemo kako se svaki prirodan broj koji nije manji od 8 može rastaviti na zbroj trojki i petica. Primjerice, 8=5+3, 9=3+3+3, 10=5+5, 11=3+3+5, 12=3+3+3+3, 13=3+5+5 i tako dalje. Kako bismo pokazali ovu tvrdnju za sve prirodne brojeve $n \geq 8$, poslužit ćemo se matematičkom indukcijom.

(*i*) Bazu indukcije smo već provjerili za brojeve 8, 9, 10, 11, 12 i 13.

(*ii*) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki broj $k=n$,

(*iii*) i dokažimo da tvrdnja vrijedi i za sljedeći broj $k=n+1$. Naime, razlikujemo dva slučaja:

1. broj n u svom rastavu na trojke i petice ima barem jednu peticu, i
2. broj n u svom rastavu ima samo trojke.

Ako vrijedi prvi slučaj, onda u broju n+1 obrišemo jednu peticu i broj 1 i zamijenimo ih s dvije trojke (recimo 14=3+3+3+5, pa je 15=14+1=3+3+3+(~~5~~+~~1~~)=3+3+3+3+3). Ako vrijedi drugi slučaj, onda u rastavu broja n+1 mora biti minimalno tri trojke u zapisu broja n (jer je n+1 veći od 9), pa obrišemo tri trojke i broj 1 i zamijenimo ih s dvije petice (recimo 14=3+3+3+5, pa je 15=14+1=~~3+3+3~~+5+~~1~~=5+5+5). Ovim smo dokazali korak indukcije. Po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj $n \geq 8$. **Q.E.D.**

Primjer 3.4. U financijskoj i gospodarskoj matematici (primjerice kod izračuna konačne i sadašnje vrijednosti više prenumerando i postnumerando iznosa) se često koristi geometrijski niz a_1, a_2, …, a_n, te formula za zbroj prvih n članova geometrijskog niza

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

gdje je $q = a_k / a_{k-1}$, $k = 2, 3, ..., n$, kvocijent geometrijskog niza (vidjeti Neralić i Šego 2009, Relić 2002). Dokažite formulu za zbroj prvih *n* članova geometrijskog niza.

***Rješenje*:** U ovom primjeru zapravo želimo pokazati da za svaki prirodan broj *n* vrijedi formula

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{9}$$

(*i*) Za *k*=1 je s jedne strane $s_1 = a_1$, a s druge strane $s_1 = a_1 \cdot \frac{q^1 - 1}{q - 1} = a_1$, pa smo time provjerili bazu indukcije.

(*ii*) Pretpostavimo da za *k*=*n* vrijedi tvrdnja $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, te

(*iii*) dokažimo da tvrdnja vrijedi i za *k*=*n*+1, to jest da vrijedi $s_{n+1} = a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$. Naime, iz definicije sume s_n i pretpostavke (*ii*) slijedi

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \underbrace{a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1}}_{(ii)} + a_1 q^n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1 q^n \\ &= a_1 \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj *n*. **Q.E.D.**

Primjer 3.5. Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju *n*-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamata obračunava po složenom kamatnom računu uz fiksnu kamatnu stopu *p* u svakom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = C_0 r^n,$$

gdje je *r* dekurzivni kamatni faktor (vidjeti Neralić i Šego 2009).

***Rješenje*:** Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

(*i*) Za *k*=1 tvrdnja vrijedi jer su kamate za prvo (jedinično) razdoblje $I_1 = \frac{C_0 p}{100}$, pa je

$$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + \frac{C_0 p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 r. \tag{11}$$

(*ii*) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj *k*=*n*, to jest da vrijedi $C_n = C_0 r^n$,

(*iii*) te dokažimo tvrdnju za sljedeći prirodan broj *k*=*n*+1, to jest pokažimo da vrijedi $C_{n+1} = C_0 r^{n+1}$. Naime,

$$C_{n+1} = C_n + I_{n+1} = C_n + \frac{C_n p}{100} = C_n \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_n r \overset{(ii)}{=} C_0 r^n r = C_0 r^{n+1}, \tag{12}$$

što smo i trebali dokazati. Po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.
Q.E.D.

3.2. Dokaz Farkaseve leme

Farkaseva lema se može iskazati na više načina, kako smo već vidjeli u prethodnom poglavlju (vidjeti tvrdnje 2.1. i 2.2.). Shodno tome, treba naglasiti kako je Farkaseva lema kroz povijest dokazivana na različite načine, pri čemu se težilo prezentiranju što jednostavnijeg i elegantnijeg dokaza (vidjeti primjerice Bartl 2008, Bartl 2012a, Bartl 2012b, Brentjes 1994, Jaćimović 2011, Jukić 2015, Mangasarian 1969, Marjanović 1972, Simonnard 1966, Svanberg 2008). Međutim, većina tih dokaza su temeljena na netrivijalnim činjenicama iz teorije optimizacije, nelinearnog programiranja, topologije ili (linearne) algebre. Posebice je u nekoliko radova naglašeno kako se Farkaseva lema može elegantno i jednostavno dokazati u okviru (linearne) algebre (vidjeti Bartl 2008, Bartl 2012a, Bartl 2012b), no to nije u potpunosti točno jer dani dokazi podrazumijevaju poznavanje pojmova poput linearnih operatora nad određenim vektorskim prostorima, matrično prikazivanje linearnih preslikavanja i slično, što svakako nije pogodno za čitatelja koji linearnu algebru poznaje u terminima matričnog računa. Upravo zbog toga ćemo sada dokazati Farkasevu lemu u terminima matričnog računa, te primjenom matematičke indukcije, nadajući se pritom da će ovaj dokaz biti razumljiv svim čitateljima koji koriste Farkasevu lemu u svom radu, a po osnovnom obrazovanju nisu matematičari. Posebno ističemo da bi ovaj dokaz mogao biti od velike koristi studentima ekonomije ili drugih primjenjenih znanosti, kako bi lakše razumijeli ispitno gradivo raznih kolegija poput Linearno i nelinearno programiranje, Operacijska istraživanja, Teorija igara, Financijsko modeliranje i drugih. Također, napominjemo da dokaz koji slijedi je preuzet iz (Jaćimović 2011). Ipak, naša prezentacija dokaza je popraćena detaljnim objašnjenjima te ispravcima grešaka koje Jaćimović ima u svom radu. Kako su tvrdnje 2.1. i 2.2. međusobno ekvivalentne, slijedi dokaz Farkaseve leme koja je iskazana kao tvrdnja 2.2.

***Dokaz tvrdnje 2.2.*:** Dokaz provodimo po $n \in \mathbb{N}$, odnosno po broju stupaca matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(*i*) Za n=1 je $A = a \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, pa sustavi (3) i (4) prelaze u sljedeći oblik:

ili

$$\text{postoji } x \geq 0 \text{ t.d. } ax = b \ \left(a, b \in \mathbb{R}^m\right)$$

ili

$$\text{postoji } z \in \mathbb{R}^m \text{ t.d. } \langle a, z\rangle \leq 0 \text{ i } \langle b, z\rangle > 0,$$

što je očito točno (vidjeti Dodatak 1.).

(*ii*) Pretpostavimo da tvrdnja 2.2. vrijedi za neki n>1,

(*iii*) i dokažimo da za m-komponentne vektore $a^1, a^2, \ldots, a^{n+1}$ ili

(I) postoje nenegativni realni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ takvi da je $b = x_1a^1 + \ldots + x_na^n + x_{n+1}a^{n+1}$

ili

(II) postoji $z \in \mathbb{R}^m$ tako da vrijedi $\langle a^1, z\rangle \leq 0, \ldots, \langle a^n, z\rangle \leq 0, \langle a^{n+1}, z\rangle \leq 0, \langle b, z\rangle > 0$.

Prema pretpostavci indukcije, imamo da ili (i) postoje nenegativni realni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takvi da je $b = x_1a^1 + \ldots + x_na^n$ ili (ii) postoji $z \in \mathbb{R}^m$ takav da je $\langle a^1, z\rangle \leq 0, \ldots, \langle a^n, z\rangle \leq 0, \langle b, z\rangle > 0$. U slučaju (i) dovoljno je staviti x_{n+1}=0 i dobit ćemo da je **(I)** točno. U slučaju (ii), imamo dvije mogućnosti: ako je

$\langle a^{n+1}, z\rangle \le 0$ odmah imamo da je **(II)** točno. S druge strane, ostaje nam razmotriti mogućnost da postoji $\overline{z} \in \mathbb{R}^m$ tako da je $\langle a^1, \overline{z}\rangle \le 0$, …, $\langle a^n, \overline{z}\rangle \le 0$, $\langle b, \overline{z}\rangle > 0$, ali $\langle a^{n+1}, \overline{z}\rangle > 0$.

Promotrimo sada dva sustava

(A) $\langle a^1, z\rangle \le 0$, …, $\langle a^n, z\rangle \le 0$, $\langle a^{n+1}, z\rangle \le 0$, $\langle b, z\rangle > 0$, i

(B) $\langle a^1, z\rangle \le 0$, …, $\langle a^n, z\rangle \le 0$, $\langle a^{n+1}, z\rangle = 0$, $\langle b, z\rangle > 0$.

Jasno je da je svako rješenje sustava (B) ujedno i rješenje sustava (A). Nadalje, ako je z rješenje sustava (A), tada je $z - \underbrace{\frac{\langle a^{n+1}, z\rangle}{\langle a^{n+1}, \overline{z}\rangle}}_{>0,\text{tj.}\neq 0} \cdot \overline{z}$ rješenje sustava (B). Dakle, (A) ima rješenje (u tom slučaju je **(II)** točno) ako i samo ako (B) ima rješenje.

Promotrimo, sada, vektore $c^i = a^i - \lambda_i a^{n+1},\ i = 1, 2, ..., n$ i $b' = b - \mu a^{n+1}$, gdje je $\lambda_i = \frac{\langle a^i, \overline{z}\rangle}{\langle a^{n+1}, \overline{z}\rangle} \le 0$ i $\mu = \frac{\langle b, \overline{z}\rangle}{\langle a^{n+1}, \overline{z}\rangle} > 0$. Lako je za provjeriti da sustav (B) ima rješenje ako i samo ako sustav

(C) $\langle c^1, z\rangle \le 0$, …, $\langle c^n, z\rangle \le 0$, $\langle a^{n+1}, z\rangle = 0$, $\langle b', z\rangle > 0$,

ima rješenje.

Korištenjem pretpostavke indukcije imamo da: ili (j) postoje nenegativni realni brojevi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ takvi da je $b' = y_1c^1 + y_2c^2 + \ldots + y_nc^n$ ili (jj) postoji $u \in \mathbb{R}^m$ takav da $\langle c^1, u\rangle \le 0, \ldots, \langle c^n, u\rangle \le 0$, $\langle b', u\rangle > 0$.

U slučaju (jj), imamo da je vektor $z = u - \gamma \overline{z}$, gdje je $\gamma = \frac{\langle a^{n+1}, u\rangle}{\langle a^{n+1}, \overline{z}\rangle}$, rješenje sustava (C), iz čega slijedi da vrijedi **(II)**.

Ako postoje nenegativni relani brojevi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ takvi da je $b' = y_1c^1 + y_2c^2 + \ldots + y_nc^n$ (slučaj (j)), tada je

$$b' = b - \mu a^{n+1} = y_1c^1 + \cdots + y_nc^n = y_1a^1 - \lambda_1 y_1 a^{n+1} + \cdots + y_n a^n - \lambda_n y_n a^{n+1}.$$

Dakle,

$$b = y_1a^1 + \cdots y_na^n + y_{n+1}a^{n+1},$$

gdje je $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i $y_{n+1} = \mu - \lambda_1 y_1 - \cdots \lambda_n y_n \ge 0$. To znači da je **(I)** točno. **Q.E.D.**

4. Primjena Farkaseve leme u modelima vrednovanja financijske imovine

U ovom poglavlju iznosimo jednu ekonomsku primjenu Farkaseve leme u području teorije vrednovanja financijske imovine. Naime, teorija vrednovanja imovine usmjerena je na objašnjavanje cijena financijske imovine u uvjetima neizvjesnosti (Qian 2011:1) pri čemu koristi različite financijske modele. Polazeći od niza pretpostavki, veze između slučajnih varijabli nastoje se opisati skupom matematičkih izraza, na temelju kojeg se formira financijski model. Takav model je u pravilu simplificirana i apstraktna slika stvarnosti koja nastaje formaliziranim zapisom pretpostavki o funkcioniranju tržišta, odnosno tržišnih sudionika i financijskih instrumenata. Prema Fabozzi (2013:xviii), cilj modela za vrednovanje financijske imovine je općenito formaliziranje odnosa između prinosa i rizika koji bi trebao postojati ako se investitori ponašaju na pretpostavljeni način. Takav formalni zapis često omogućuje analizu modela, odnosno ispitivanje veza između varijabli modela uvažavajući ograničenja modela. Modeli za vrednovanje financijske imovine razlikuju se po različitim pristupima i/ili broju pretpostavki koje koriste za objašnjavanje određenih tržišnih fenomena. Jedan od važnijih koncepata u teoriji vrednovanja je pojam arbitraže. Pod pojmom arbitraža se u ekonomiji najčešće misli na aktivnost (strategiju) kojom se može ostvariti nerizični profit, i to na temelju uočavanja nepravilnosti u vrednovanju imovine od strane tržišta. Na primjer, prilika za nerizičnu arbitražu postoji kada postoji razlika u cijenama iste vrste imovine na različitim tržištima. U slučaju da se uoče takve nepravilnosti, tržišni sudionici će na tržištu s manjom cijenom kupovati, a na tržištu s većom cijenom prodavati tu imovinu. Povećana potražnja na jednom, odnosno povećana ponuda tog dobra na drugom tržištu bi trebala dovesti do izjednačavanja cijena na oba tržištima. No, nerizičnu arbitražu je moguće izvesti i kada se uoči da postoje različite imovine (portfelji) koje imaju jednake novčane tokove (isplate, engl. *payoffs*), ali čije su trenutne cijene različite. Drugim riječima, prilika za nerizičnu arbitražu postoji ako i samo ako je moguće sastaviti portfelj koji ima jednake isplate kao i referentni portfelj, ali tako da su im cijene različite. Takav portfelj nazivamo replicirajućim portfeljem. Ukoliko se ukaže prilika za nerizičnu arbitražu, pretpostavlja se da je ona kratkotrajna jer aktivnosti tržišnih arbitražera dovode do toga da se imovine s jednakim isplatama prodaju po jednakim cijenama (Fabozzi, xx).

Iako je poznato da se cijene imovina na tržištu formiraju pod utjecajem mehanizama ponude i potražnje, kako bi se odredila (teorijska) cijena neke imovine, u ekonomiji se često primjenjuju modeli vrednovanja različite imovine. Potreba za određivanjem teorijske cijene postoji, na primjer, kada nije poznata tržišna cijena imovine, kada se neka imovina tek uvodi na tržište, odnosno kada se želi procijeniti je li tržište korektno vrednovalo određenu imovinu (mogućnost arbitraže). Jedan pristup vrednovanju financijske imovine polazi od pretpostavke da nerizična arbitraža nije moguća. Takva pretpostavka implicira da nije moguće ostvariti nerizični profit na temelju uočavanja nepravilnosti u vrednovanju imovine, odnosno da sva imovina koja ima jednake isplate, ima i jednake cijene. Tada kažemo da vrijedi zakon jedne cijene (Fabozzi 2012:52). Ako vrijedi zakon jedne cijene, tada je neke kompleksne vrste imovina (kao što su izvedenice) moguće vrednovati korištenjem koncepta replicirajućeg portfelja čija je cijena poznata.

Kako bismo mogli analizirati arbitražu, uvesti ćemo jednostavni dvoperiodični model ekonomije. Potom ćemo pokazati primjenu Farkaseve leme, pri čemu se opredjeljujemo za prezentaciju modela koja je pogodna za studente ekonomije sa osnovnim znanjem o linearnoj algebri. Kao izvor za osnovne definicije koristimo Fabozzi (2013).

Pretpostavimo da razmatramo tržište na kojem postoji n imovina, te da ekonomija u sljedećem razdoblju može poprimiti m stanja (na primjer: recesija, ekspanzija, nepromijenjeno stanje i slično). Također, neka su x_{ij} isplate i-te imovine u j-tom stanju, prikazane u matrici $\boldsymbol{X}=[x_{ij}]$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$. Pritom je jedina nesigurnost u modelu dana s nesigurnosti koje će stanje nastupiti, a isplate imovina u različitim stanjima su deterministički određene. Cijene imovina su dane vektorom cijena $\boldsymbol{p}=\left(p_1,p_2,\ldots,p_n\right)$, $\boldsymbol{w}=\left(w_1,w_2,\ldots,w_n\right)$ je *vektor portfelja* čiji elementi predstavljaju *novčane iznose* pojedine imovine u portfelju, a transakcijski troškovi su zanemarivi. Isplata portfelja w u sljedećem razdoblju dana je vektorom

$$\underset{(m,1)}{\boldsymbol{X}^{w}} = \underset{(m,n)}{\boldsymbol{X}^{T}} \underset{(n,1)}{\boldsymbol{w}} . \tag{13}$$

Ujedno, ako postoji vektor portfelja $\boldsymbol{v}=\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)$, takav da je

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{v}=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{w} , \tag{14}$$

kažemo da je portfelj w moguće *replicirati*. Ukoliko je u portfelju v moguće zauzeti suprotnu poziciju u odnosu na portfelj w, tada se očito portfelj w može savršeno pokriti (moguć je *savršeni hedging*). Dakle, ukoliko je poznata matrica isplata imovina u sljedećem razdoblju, te portfelj w, izraz (14) koristimo za definiranje portfelja w za savršeni hedging. Za portfelje w i v za koje vrijedi (14), treba vrijediti i zakon jedne cijene:

$$p\left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{v}\right)=p\left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w}\right),\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{w}. \tag{15}$$

Ako neki tržišni sudionik želi ostvariti točno određenu isplatu portfelja u svakom od m stanja, njegove mogućnosti ovise o tržištu, odnosno o broju i karakteristikama imovine koju može kombinirati u portfelju. Tada se problem izbora portfelja s željenim isplatama može svesti na rješavanje sustava (13), gdje je vektor portfelja $\boldsymbol{w}$ vektor nepoznanica. Općenito, bilo koji portfelj $\boldsymbol{X}^w$ možemo smatrati jednom imovinom, pa ćemo u nastavku te riječi koristiti kao sinonime.

Nadalje, uvesti ćemo vektor $\boldsymbol{q}=\left(q_1,q_2,\ldots,q_n\right)$ čiji elementi q_j označavaju (trenutnu) cijenu novčane jedinice koja se isplaćuje ako u ekonomiji u sljedećem razdoblju nastupi stanje j, $j=1,\ldots,m$.[7] Ako je poznat vektor $\boldsymbol{q}$, tada je cijena i-te imovine:

$$p_i^0=q_1x_{i1}+q_2x_{i2}+...+q_mx_{im}=\sum_{j=1}^{m}q_1x_{ij}\ ,\ i\in\{1,2,...,n\}\ , \tag{16}$$

a cijene svih imovina prikazujemo vektorom cijena $\boldsymbol{p}^0$:

$$\boldsymbol{p}^0=\left[p_i^0\right]=\boldsymbol{Xq}. \tag{17}$$

Trenutnu cijenu portfelja w računamo formulom:

$$\boldsymbol{p}_w^0=\boldsymbol{p}^{0T}\boldsymbol{w}=\left(\boldsymbol{Xq}\right)^T\boldsymbol{w}=\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w}. \tag{18}$$

Nerizična arbitraža bi bila moguća kada bi vrijedilo da imovine $\boldsymbol{w}$ i $\boldsymbol{v}$ imaju jednake isplate u svim stanjima, ali da je $p(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w})>p(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{v})$. Tada bi arbitražeri kupovali imovinu $\boldsymbol{v}$ (duga pozicija) i kratko prodavali imovinu $\boldsymbol{w}$ (kratka pozicija), ostvarili bi zaradu na temelju trenutne razlike u cijenama, a kratke i duge pozicije zatvorili u sljedećem razdoblju bez troškova. Također, nerizična arbitraža bi bila moguća kada bi portfelji $\boldsymbol{w}$ i $\boldsymbol{v}$ imali jednake cijene, pri čemu je, na primjer, $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w}\geq\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{v}$. Tada bi arbitražeri kupovali imovinu $\boldsymbol{v}$ (duga pozicija) i kratko prodavali imovinu $\boldsymbol{w}$ (kratka pozicija), ne bi imali nikakav trošak u trenutku sastavljanja pozicije, a u sljedećem razdoblju bi prilikom zatvaranja pozicija ostvarili zaradu. Na temelju prethodnog, definirajmo općenito dva oblika arbitraže, arbitražu tipa A i arbitražu tipa B.

Arbitraža tipa A je strategija koja ima zaradu u trenutku sastavljanja a u svim mogućim budućim stanjima nema nikakvih troškova. Drugim riječima, arbitraža tipa A ima negativnu cijenu u trenutku t_0 i nenegativne isplate u svim mogućim stanjima u trenutku t_1, to jest, ako i samo ako postoji portfelj $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$ takav da je

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w}\geq\boldsymbol{0}\ \text{i}\ \boldsymbol{p}^{OT}\boldsymbol{w}<0. \tag{19}$$

Arbitraža tipa B je strategija koja ne košta ništa u trenutku sastavljanja i u sljedećem razdoblju ostvaruje zaradu. Drugim riječima, strategija ima nepozitivnu cijenu u trenutku t_0 i sve nenegativne isplate u svim mogućim stanjima u trenutku t_1, pri čemu je barem jedna isplata strogo pozitivna, odnosno ako i samo ako postoji vektor $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$ takav da je

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{w}>\boldsymbol{0}\ \ \text{i}\ \ \boldsymbol{p}^{0\prime}\boldsymbol{w}\leq 0. \tag{20}$$

Primijetimo da ćemo slabi oblik arbitraže tipa B dobiti ako postoji vektor $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$ takav da je

$$\boldsymbol{p}^{0\prime}\boldsymbol{w}=0\ \text{i}\ \boldsymbol{X}'\boldsymbol{w}>\boldsymbol{0}, \tag{21}$$

[7] Ovaj vektor nazivamo još i vektorom cijena Arrow-Debeuovih vrijednosnica ili vektorom cijena stanja (Arrow, xx), vidjelti Arrow (1964), Debreu (1959), Arrow i Debreu (1954).

dok ćemo slabi oblik arbitraže tipa *A* moći napraviti ako postoji vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$\boldsymbol{p}^{0\prime}\boldsymbol{w} < 0 \text{ i } \boldsymbol{X}'\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}. \tag{22}$$

Sada ćemo istaknuti važnost Farkaseve leme, te prodiskutirati posljedice primjene. Dakle, ako i samo ako postoji prilika za arbitražu, tada sustav (19) ima rješenje. Prema Farkasevoj lemi, to bi značilo da sustav $\boldsymbol{X\lambda} = \boldsymbol{p}^0,\ \boldsymbol{\lambda} \geq 0,\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, nema rješenje. S obzirom da smo u (18) zapisali da je $\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{Xq}$, sada ćemo slijediti uvedenu notaciju, te dalje sustav razmatramo u obliku $\boldsymbol{Xq} = \boldsymbol{p}^0,\ \boldsymbol{q} \geq 0,\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$. Zaključujemo da je arbitraža moguća kada sustav $\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{Xq},\ \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$ nije rješiv. Naime, ako vrijedi $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{p}^{0T}\boldsymbol{w} < 0$, slijedi: $\boldsymbol{p}^{0T}\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{Xq})^T\boldsymbol{w} = \boldsymbol{q}^T \underbrace{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w}}_{\geq 0} < 0$, pa nejednakost vrijedi ako i samo postoji vektor $\boldsymbol{q} < 0,\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$. U ekonomskoj interpretaciji, iz prethodnog zaključujemo da je arbitraža moguća ako novčana jedinica u nekom sljedećem stanju danas ne košta ništa, odnosno ako je njezina cijena danas negativna.

S druge strane, pretpostavimo da postoji vektor $\boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$ koji je rješenje sustava $\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{Xq}$. Tada arbitraža nije moguća jer je $\boldsymbol{p}^{0T}\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{Xq})^T\boldsymbol{w} = \underbrace{\boldsymbol{q}^T}_{\geq 0} \underbrace{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w}}_{\geq 0} \geq 0$. Dakle, u ekonomskoj interpretaciji, postojanje vektora $\boldsymbol{q}$ znači da je cijena svake imovine određena s cijenom novčane jedinice u stanju *j* (Varian 1987). Drugim riječima, arbitraža nije moguća ako je novčana jedinica u nekom stanju jednako vrednovana neovisno o tome od koje imovine dolazi ako rizik ostvarivanja novčane jedinice ovisan o stanju koje nastupi, ne o konkretnoj imovini. Podijelimo li sve elemente vektora u jednakosti (17) sa sumom elemenata vektora $\boldsymbol{q}$, u oznaci $|\boldsymbol{q}|_1 = q_1 + q_2 + .. + q_m$, dobijemo

$$\hat{\boldsymbol{p}}^0 = \boldsymbol{p}^0 \frac{1}{|\boldsymbol{q}|_1} = \boldsymbol{Xq}\frac{1}{|\boldsymbol{q}|_1} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{q}}. \tag{23}$$

Očito je zbroj svih elemenata vektora $\hat{\boldsymbol{q}}$ jednak 1 pa se vrijednosti elemenata tog vektora mogu interpretirati kao vjerojatnosti. Ove vrijednosti nisu „prave“ vjerojatnosti nastupa određenog stanja, i nazivaju se *vjerojatnostima neutralnim na rizik* (engl. *risk neutral probabilities*). Ako E^Q predstavlja očekivanje uz vjerojatnosti neutralne na rizik, slijedi:

$$\hat{p}_i^0 = p_i^0 \frac{1}{|\boldsymbol{q}|_1} = [\boldsymbol{x}_{i\bullet}]\boldsymbol{q}\frac{1}{|\boldsymbol{q}|_1} = [\boldsymbol{x}_{i\bullet}]\hat{\boldsymbol{q}} = E^Q[\boldsymbol{x}_i],\ i \in \{1,2,...,n\}. \tag{24}$$

Zaključujemo da, ako i samo ako postoji $\boldsymbol{q}$ koji je rješenje sustava (17), postoje i vjerojatnosti uz koje je normalizirana cijena imovine jednaka njezinoj očekivanoj vrijednosti.

Korištenjem Farkaseve leme, došli smo do zaključka da arbitraža nije moguća ako su sve buduće jedinične isplate (koje imaju jednaku razinu rizika) jednako vrednovane od strane tržišta. Također, iz Farkaseve leme proizlazi da je egzistencija vjerojatnosti neutralnih na rizik (i samog koncepta vrednovanja s rizik-neutralnim vjerojatnostima) uvjetovana odsutnosti prilike za arbitražu (Jaćimović 2011). Koncept replicirajućeg portfelja i vrednovanja s vjerojatnostima neutralnih na rizik koristi se, na primjer, prilikom vrednovanja kompleksnih vrsta imovine, kao što su opcije (vidjeti binomni model (Cox, Ross i Rubenstein (1979)), ili Black – Scholes model (1973), i druge). Zato u nastavku najprije dajemo primjer modela tržišta s mogućnosti arbitraže, a zatim ga proširujemo na općeniti pojednostavljeni model za vrednovanje opcija.

Primjer 4.1

Razmatramo dva portfelja, portfelj 1 (P1) i portfelj 2 (P2). Njihove trenutne cijene su redom p_1=6 i p_2=10. Pretpostavlja se da ekonomija u sljedećem razdoblju može poprimiti dva stanja: nepromijenjeno stanje ili ekspanziju. Očekivane isplate portfelja su prikazane u tablici 1. Ispitajmo postoji li mogućnost za arbitražu.

	P1	P2
nepromijenjeno	4	4
ekspanzija	10	12

Tablica 1. – Isplate portfelja

Dane podatke zapisat ćemo matrično: $\boldsymbol{p}^{0T} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix}'$, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{q}^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}'$. Provjeravamo postoji li $\boldsymbol{q}^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \geq \boldsymbol{0}$ za koji sustav:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

ima rješenje:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 6 \\ 10 & 12 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 6/5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1/5 & -1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & -5/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5/2 \end{array}\right].$$

S obzirom da je rješenje $\boldsymbol{q}^T = \begin{bmatrix} 4 & -5/2 \end{bmatrix} \ngeq 0$, postoji prilika za arbitražu.

Primjer 4.2 – Vrednovanje opcija[8]

Razmatramo tržište na kojem imamo dionicu, te nerizičnu imovinu i europsku call opciju sastavljenu na razmatranu dionicu. Trenutna cijena dionice je S_0, cijena obveznice B, a izvršna cijena call opcije je E. Cijena dionice u sljedećem mjesecu može se s prethodne razine povećati za U% s vjerojatnošću p ili smanjiti za D% s vjerojatnošću 1□p. Također, pretpostavljamo da je tržište efikasno (i nema transakcijskih troškova), nerizična kamatna stopa i za sljedeći period je fiksna, $i > 0$, $r=1+i$ je nerizični dekurzivni kamatni faktor, nema isplate dividendi na dionicu kroz promatrano razdoblje do dospijeća opcije.

Neka je $u = (1+U\%)$ faktor povećanja cijene dionice, odnosno $d = (1+D\%)$ faktor smanjenja cijene dionice i $u > d$. Ako se cijena u sljedećem razdoblju poveća za U%, tada cijena iznosi $S_u = uS_0$, odnosno $S_d = dS_0$ ako se smanji. Nadalje, ako call opcija na dospijeće vlasniku donosi zaradu, tada će je vlasnik izvršiti, u suprotnom će je ostaviti da istekne. S obzirom da call opcija daje mogućnost kupnje vezane imovine po izvršnoj cijeni, vlasnik će je izvršiti ako je $S_T - E > 0$, gdje je S_T cijena dionice na dospijeće. Prema tome, isplata call opcije na dospijeće se može zapisati kao $\max\{0, S_T - E\}$. Vrijednost nerizične imovine u sljedećem periodu uz nerizičnu kamatnu stopu i je rB.

Matrica isplata imovina u sljedećem periodu je:

$$X = \begin{bmatrix} S_d & S_u \\ rB & rB \\ \max\{0, S_d - E\} & \max\{0, S_u - E\} \end{bmatrix},$$

pri čemu je $\boldsymbol{p}^{0T} = \begin{bmatrix} S_0 & B & c_0 \end{bmatrix}$. Koristeći Farakaševu lemu, utvrdili smo da arbitraža nije moguća ako postoji rješenje sustav $\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{Xq}$, $\boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}$. Kada uvrstimo vrijednost, slijedi:

[8] Primjer formiran prema Vanderbei (online [12.12.2017]), te Cox, Ross i Rubenstein (1979).

$$\begin{bmatrix} S_d & S_u \\ rB & rB \\ \max\{0, S_d - E\} & \max\{0, S_u - E\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ B \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Izdvojit ćemo prve dvije jednadžbe, te tražimo rješenje sustava

$$\begin{bmatrix} S_d & S_u \\ rB & rB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ B \end{bmatrix}.$$

Lako se pokaže da je matrica X regularna (tržište je potpuno), te slijedi

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_d & S_u \\ rB & rB \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_0 \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{S_d rB - S_u rB} \begin{bmatrix} rB & -S_u \\ -rB & S_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ B \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{rB(S_d - S_u)} \begin{bmatrix} rBS_0 - S_u B \\ -rBS_0 + S_d B \end{bmatrix} = \frac{1}{rBS_0(d-u)} \begin{bmatrix} rBS_0 - uS_0 B \\ -rBS_0 + dS_0 B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{r(d-u)} \begin{bmatrix} r-u \\ d-r \end{bmatrix}.$$

Pritom mora vrijediti da je $\boldsymbol{q} \geq 0$, pa zbog $d - u < 0$ mora vrijediti $d \leq r \leq u$. Iz treće jednadžbe slijedi

$$q_1 \max\{0, S_d - E\} + q_2 \max\{0, S_u - E\} = c_0,$$

te uvrštavanjem dobivenih rješenja za q_1 i q_2 iz prve dvije jednadžbe dobivamo:

$$\frac{r-u}{r(d-u)} \max\{0, S_d - E\} + \frac{d-r}{r(d-u)} \max\{0, S_u - E\} = c_0. \tag{25}$$

S obzirom da je $\frac{r-u}{r(d-u)} + \frac{d-r}{r(d-u)} = \frac{d-u}{r(d-u)} = \frac{1}{r}$, dijeljenjem jednadžbe (25) s $\frac{1}{r}$, slijedi

$$\frac{r-u}{d-u} \max\{0, S_d - E\} + \frac{d-r}{d-u} \max\{0, S_u - E\} = rc_0.$$

Također, $\frac{r-u}{d-u} + \frac{d-r}{d-u} = 1$, pa se $\frac{r-u}{d-u}$ i $\frac{d-r}{d-u}$ mogu interpretirati kao vjerojatnosti. U skladu sa zaključkom koji slijedi iz izraza (23), uočavamo da te „vjerojatnosti“ ne ovise o „pravim“ vjerojatnostima p, odnosno 1-p, odnosno to su vjerojatnosti neutralne na rizik. Dalje, pišemo:

$$c_0 = \frac{\frac{r-u}{d-u} \max\{0, S_d - E\} + \frac{d-r}{d-u} \max\{0, S_u - E\}}{r} = \frac{1}{r} E^Q[c_T],$$

Sukladno izrazu (24), uočavamo da cijena call opcije mora biti jednaka diskontiranoj očekivanoj vrijednosti call opcije uz vjerojatnosti neutralne na rizik.

U prethodnom izvodu smo pokazali kako iz Farkaseve leme možemo izvesti formulu za vrednovanje opcija. Iako simplificiran, ovaj pristup je osnova izgradnje dinamičkih višeperiodičnih modela (Černy, 2009:1).

5. Zaključak

U radu je predočen dokaz Farkaseve leme matematičkom indukcijom s detaljnim objašnjenjima. Dokaz je intuitivan i, nadamo se, prikladan za sve čitatelje koji u svom radu koriste ovu lemu a pritom nisu po osnovnom obrazovanju matematičari. Također, smatramo da je ovakav dokaz posebno prikladan za studente ekonomije, ali i za studente drugih fakulteta, koji tek uče o osnovama optimizacije. U radu iznosimo i primjene Farkaseve leme u ekonomiji. U radu se prezentira i jednostavni dvoperiodični model ekonomije na temelju kojeg se želi pokazati zašto je matematičko modeliranje tržišnih uvjeta pogodno za analizu modela te kako primjenom teorije iz linearne algebre možemo analizirati ekonomske modele ovog oblika. Pokazano je zašto je nemogućnost arbitraže važna pretpostavka za modele za vrednovanje financije imovine, te na koji način iz Farkaseve leme izvodimo rizik-neutralno vrednovanje. Koncept rizik-neutralnog vrednovanja jedan je od važnijih dostignuća u teoriji vrednovanja i vjerujemo da je u danim primjerima približen studentima ekonomije.

LITERATURA

Acerbi, F. (2000) „Plato: Parmenides 149a-c3. A Proof by Complete induction?“, Arch Hist Exact Sc, 55, 57–76. doi.org/10.1007/s004070000020

Bartl, D. (2008) „A short algebraic proof of the Farkas’ lemma“, SIAM Journal on Optimization, 19(1), 234–239.

Bartl, D. (2012a) „A note on the short algebraic proof of Farkas' Lemma“, Linear and Multilinear Algebra, 60(8), 897-901.

Bartl, D. (2012b) „A very short algebraic proof of the Farkas Lemma“, Mathematical Methods of Operations Research, 75, 101-104.

Brentjes, S. (1994) *Linear optimalisation*. U Grattan-Guinness, I. (ed.): Companion Encyclopediae of the Mathemathical Sciences II. London, 828–833.

Dakić, B. (n.a.) Gaussova dosjetka. www.element.hr [13.11.2017.]

Gurka, D. (2011) „The Gyula Farkas Memorial Competition in the Context of the Hungarian Scientific Competitions“, *Interdisciplinary Description of Complex Systems*, 9(1), 81-86.

Jaćimović, M. (2011) „Farkas' Lemma of Alternative“, The Teaching of Mathematics, 14(2), 77-86.

Jukić, D. (2015) *Konveksni skupovi*. Osijek. Dostupno online [8.11.2017.]: http://www.mathos.unios.hr/~jukicd/Konv_Skupovi_skripta.pdf

Mangasarian, O. L. (1969) *Nonlinear Programming*. New York: McGraw-Hill.

Marjanović, M. M. (1972) „An iterative method for solving polynomial equations“, Topology and its applications, Budva, 170–172.

Neralić, L. (2008) *Uvod u matematičko programiranje 1*. Zagreb: Element.

Neralić, L., Šego, B. (2009) *Matematika*. Zagreb: Element.

Prékopa, A. (1999) „Gyula Farkas’ life and the importance of his work in the theory of optimalization.“ In Komlósi, S. and Szántai, T. (eds.): Alternative Ways in Hungarian Operation Research. Dialóg Campus, Budapest–Pécs, 15–31.

Relić, B. (2002) *Gospodarska matematika*. Zagreb: Računovodstvo i financije.

Simonnard, M. (1966) *Linear Programming*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Svanberg, K. (2008) Farkas' Lemma Derived by Elementary Linear Algebra. Dostupno online [26.6.2016.]: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.146.5464&rep=rep1&type=pdf

Arrow, K. J. (1964). The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing. Review of Economic Studies 31: 91–96.

Arrow, K. J., Debreu G. (1954) Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica,1954, 265-290.

Černy, A. (2009) Mathematical Techniques in Finance, 2nd Edition. Princeton: Princeton University Press.
Debreu, G. (1959). The Theory of Value. New York: Wiley.
Fabozzi, F. J. (ed.) (2013) Encyclopedia of financial models. Hoboken: John Wiley and Sons.
Qian, J. (2015) An Introduction to Asset Pricing Theory. http://jhqian.org/apt/apbook.pdf [16.2.2016]
Varian, H. R. (1987) The Arbitrage Principle in Financial Economics. The Journal of Economic Perspectives, 1 (2), 55 – 72.